ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE

Etablissement d'enseignement supérieur privé soutenu par la Chambre de Commerce et d'Industrie de l'Oise

6, avenue Thiers - 60200 Compiègne - Tél. 44 40 29 32

CONCOURS D'ADMISSION 1987

MATHEMATIQUES I

Mercredi 3 Juin 1987 de 8H00 à 12H00

Option : Economique

Coefficient : - Economique 3

PROBLEME I

On considère la famille de fonctions f_k (k réel), de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, donnée par :

$$f_k(x) = \frac{k + \ln x}{x}$$

1°- a) Etudier les variations d'une fonction f_k.

b) Montrer qu'il existe un point I_k de $(\mathcal{C}_k)$ dont l'abscisse annule la dérivée seconde de f_k.

c) Vérifier que :

$\forall k \in \mathbb{R}, \forall x > 0 \quad x^3 f''_k(x) - 2.x.f_k(x) = -3$

En déduire l'équation d'un ensemble (J) auquel appartiennent les points I_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

d) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_{-1})$, $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ relativement à un répère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $|\vec{i}| = 1$ cm et $|\vec{j}| = 5$ cm.

2°- a) Soit $f_k^{(n)}(x)$ la dérivée nième de la fonction f_k.

Calculer $f_k^{(3)}(x)$.

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels λ_n et μ_n, indépendants de k, tels que pour tout x strictement positif :

$$f_k^{(n)}(x) = \lambda_n \cdot \frac{k + \ln x - \mu_n}{x^{n+1}}$$

et donner les équations récurrentes vérifiées par λ_n et μ_n.

c) Calculer λ_n et μ_n en fonction de n.

d) Montrer que pour tout entier $n > 0$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

en déduire que : $\ln(n+1) \leqslant \mu_n \leqslant 1 + \ln n$

La suite μ_n est-elle convergente ?

3°- a) Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan définis par :

$$\begin{cases} a^n e^{-k} \leqslant x \leqslant a^{n+1} e^{-k} \\ 0 \leqslant y \leqslant f_k(x) \end{cases} \qquad a > 1 \text{ et } n \text{ entier naturel}$$

b) Montrer que ces aires sont indépendantes de k et forment une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

PROBLEME II

A chaque entier naturel n, on fait correspondre l'application g_n telle que :

$x \longmapsto g_n(x)$ (avec $x \in [0,1]$), définie comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}[& g_n(x) = -(n+1)^3 x^2 + (n+1)^2 x \\ \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, 1] & g_n(x) = 0 \end{cases}$$

1°-Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction g_n est intégrable et calculer :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx.$$

Tournez la page S. V. P.

2°- Montrer que la suite de terme général I_n est convergente ; déterminer sa limite.

3°- A toute valeur x fixe de [0,1] , on associe la suite de terme général $j_n = g_n(x)$.

Montrer que la suite de terme général j_n est convergente ; déterminer sa limite.

4°- On définit alors une application g telle que :

$x \longmapsto g(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n(x)$ avec $x \in [0,1]$

Montrer que la fonction g est intégrable.

Calculer $\int_0^1 g(x)\,dx$

5°- Donner les valeurs de $\lim_{n \to +\infty} \left[\int_0^1 g_n(x)\,dx \right]$

et $\int_0^1 \left[\lim_{n \to +\infty} g_n(x)\,dx \right]$.

Comparer les résultats .

NB : Pour guider le raisonnement, il est conseillé de tracer une représentation graphique de g_n

PROBLEME III

NOTATIONS : * $\mathcal{M}$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note : 0_3 la matrice nulle ; I_3 la matrice unité.

pour $P \in \mathcal{M}$: $P^0 = I$, $P^2 = P \cdot P$ et pour $n \geq 1$ $P^n = P^{n-1} \cdot P$

on donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

* $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

* M est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}$ qui, à tout couple (x,y), fait correspondre M (x,y) tel que $M(x,y) = x.A + y.B$

On note $\mathcal{C}$ l'espace-image de M.

* E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, sa base canonique : $B_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

on donne le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

* $f_{x,y}$ est une application linéaire de E dans E. la matrice de $f_{x,y}$ dans la base B_0 est M (x,y). on note F l'ensemble des $f_{x,y}$

* L'orbite de $\vec{u}$, notée $\mathcal{O}(\vec{u})$, est l'ensemble des images de $\vec{u}$ par $f_{x,y}$ quand $f_{x,y}$ decrit F.

PARTIE 1

1°- Donner l'expression de la matrice M (x,y)

2°- Démontrer que M est une application linéaire. Quel est son noyau ?

Quelle est la dimension de $\mathcal{C}$?

3°- Déterminer le noyau et l'espace-image de $f_{1,0}$ et de $f_{0,1}$.

Etudier la position relative de ces sous-espaces vectoriels de E.

4°- Déterminer l'orbite de $\vec{u}$.

PARTIE 2

1°- Calculer A^2 et A^3 et déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2°- Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3°- Calculer A . B et B . A

4°- Calculer $[M(x,y)]^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE 3

1°- Déterminer les valeurs propres ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) et une base de vecteurs propres de A.

2°- Montrer que B admet les mêmes vecteurs propres que A. Quelles sont les valeurs propres correspondantes ?

3°- Diagonaliser M (x,y).

Retrouver l'expression de $[M(x,y)]^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.